13 Exercice Principale 2016 30′ 5 Points

On considère, dans $\mathbb{C}$, les deux équations suivantes :

(E_1) : $z^2-(1+5i)z-8+i=0$

et (E_2) : $z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)+1+8i=0$.

1°) a) vérifier que $(3+i)^2=8+6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1).

2°) a) Déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)z+1+8i=(z-i)(z^2+bz+c)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_2).

3°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points d'affixes respectives : $z_A=i$, $z_B=2+3i$ et $z_C=-1+2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.

14 Exercice Principale 2017 25′ 4 Points

1°) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-2(1+i)z+3-2i=0$.

a) Vérifier que $(1+2i)^2=-3+4i$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2°) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A=-i$, $z_B=3$, $z_C=2+3i$ et $z_D=-1+2i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Calculer $|z_C-z_A|$ et $|z_D-z_B|$.

c) Calculer $(z_C-z_A)(\overline{z_D-z_B})$.

d) Déduire que $ABCD$ est un carré et calculer son aire.